

## Capítulo 4

TABELA DE INTEGRAIS
$\int 1 dx = x + C$
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$
$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln \sec(x)  + C$
$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln \operatorname{sen}(x)  + C$
$\int \sec(x) \cdot dx = \ln \sec(x) + \operatorname{tg}(x)  + C$
$\int \operatorname{cosec}(x) \cdot dx = -\ln \operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)  + C$
$\int \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + C$
$\int \operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$
$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$
$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + C$
$\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$

**P 4.2**

Resolução:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } I &= \int \left( \frac{2}{7} \sqrt{x} + x^3 \sqrt{x} \right) dx = \frac{2}{7} \int x^{1/2} dx + \int x \cdot x^{1/3} dx = \frac{2}{7} \int x^{1/2} dx \\
 &+ \int x^{4/3} dx = \frac{2}{7} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{7/3}}{7/3} + C = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C \\
 &= \frac{4}{21} \sqrt{x^2 \cdot x} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^6 \cdot x} + C = \frac{4}{21} x \sqrt{x} + \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C \\
 &= \frac{x}{7} \left( \frac{4}{3} \sqrt{x} + 3x \sqrt[3]{x} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } I &= \int \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right)^2 dx = \int \left( \frac{x^2}{4} + 2 \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{1}{4} \int x^2 dx + 2 \int 1 dx \\
 &+ 4 \int x^{-2} dx = \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} + 2x + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{12} x^3 + 2x - \frac{4}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } I &= \int \left( \frac{3}{7(1+x^2)} + \frac{2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \right) dx = \frac{3}{7} \int \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3}{7} \arctan x + \\
 &2 \arcsin x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } I &= \int \frac{\sin(2x)}{\cos^3 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^3 x} dx = 2 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 2 \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx = \\
 &2 \int \tan x \cdot \sec x dx = 2 \sec x + C
 \end{aligned}$$

e) Vamos fazer divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2x^2 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^2 + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 - x^2} \phantom{0} \\
 x^2 \\
 \underline{-x^2 - 1} \\
 -1
 \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \int (x^2 + 1) dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^3}{3} + x - \arctan x + C
 \end{aligned}$$

**P 4.4**

Resolução:

- a)  $I = \int (3 + 3\cotg^2 x) dx = 3 \int (1 + \cotg^2 x) dx = 3 \int \operatorname{cosec}^2 x dx =$   
 $3(-\cotg x) + C = -3 \cotg x + C$
- b)  $I = \int \frac{3-x^2}{x-\sqrt{3}} dx = \int \frac{(3-x^2)(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} dx = \int \frac{(3-x^2)(x+\sqrt{3})}{(x^2-3)} dx =$   
 $\int \frac{(3-x^2)(x+\sqrt{3})}{-(3-x^2)} dx = - \int (x + \sqrt{3}) dx = - \int x dx - \int \sqrt{3} dx = -\frac{x^2}{2} - \sqrt{3}x +$   
 $C = -x \left( \frac{x}{2} + \sqrt{3} \right) + C$
- c)  $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^6-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^4(x^2-1)}} dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{(x^2-1)}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}} dx =$   
 $\operatorname{arc sec} x + C$

#### P 4.6

Resolução:

- a) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^2 + x - 5 \quad \rightarrow \quad du = (2x + 1)dx$$

Então,

$$I = \int (2x + 1)\sqrt{x^2 + x - 5} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} (x^2 + x - 5)^{3/2} + C$$

Resposta:  $I = \frac{2}{3} (x^2 + x - 5)^{3/2} + C.$

- b) Fazendo a substituição,

$$u = x^2 + 1 \rightarrow \quad du = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{du}{2}$$

Então,

$$I = \int x e^{x^2+1} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C.$

- c) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^2 + 1 \rightarrow \quad du = 2x dx$$

Então,

$$I = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x^2 + 1| + C$$

Resposta:  $I = \ln|x^2 + 1| + C$

d) Vamos fazer a substituição:

$$u = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad du = 3dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Então,

$$I = \int e^{3x+2} dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \cdot e^u + C = \frac{1}{3} \cdot e^{3x+2} + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{3} \cdot e^{3x+2} + C$ .

e)  $I = \int \sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x} dx$

Vamos fazer a substituição:

$$u = \operatorname{tg} x \quad \rightarrow \quad du = \sec^2 x dx$$

Então,

$$I = \int \sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

Resposta:  $I = e^{\operatorname{tg} x} + C$ .

#### **P 4.8**

Resolução:

a) Fazendo a substituição,

$$u = 3x + 1 \quad \rightarrow \quad du = 3dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{(3x+1)^4} dx = 2 \int (3x+1)^{-4} dx = 2 \int (u)^{-4} \frac{du}{3} = \frac{2}{3} \frac{u^{-3}}{-3} + C \\ &= -\frac{2}{9u^3} + C = -\frac{2}{9(3x+1)^3} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{2}{9(3x+1)^3} + C$ .

b) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^3 + 2 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2 dx \quad \rightarrow \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} u^{1/2} + C = \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 2)^{1/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 2} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 2} + C$ .

c) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^2 + 3x - 4 \quad \rightarrow \quad du = (2x + 3) dx$$

Então,

$$I = \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x^2 + 3x - 4| + C$$

Resposta:  $I = \ln|x^2 + 3x - 4| + C$ .

d) Antes de fazer a substituição, vamos simplificar,

$$\int \frac{x^2}{x^3(1 + \ln^2 x)} dx = \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$$

Vamos fazer a substituição:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Então,

$$I = \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int \frac{1}{(1 + u^2)} du = \arctan u + C = \arctan(\ln x) + C$$

Resposta:  $I = \arctan(\ln x) + C$ .

e) Vamos fazer a substituição:

$$u = \sin x \quad \rightarrow \quad du = \cos x dx$$

Então,

$$I = \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \int u^2 \cdot du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Resposta:  $I = \frac{\sin^3 x}{3} + C$ .

f) Vamos fazer a substituição:

$$u = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2du$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \sec^2(u) \cdot 2du = 2 \int \sec^2(u) du = 2 \cdot \operatorname{tg} u + C \\ &= 2 \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = 2 \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + C$ .

g) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^2 + 4x + 1 \quad \rightarrow \quad du = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx \quad \rightarrow \quad (x + 2)dx = \frac{du}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int (x + 2) \cdot \cos(x^2 + 4x + 1) dx = \int \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \sin u + C \\ &= \frac{1}{2} \sin(x^2 + 4x + 1) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 4x + 1) + C$ .

h) Vamos fazer a substituição:

$$u = x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2} \quad \rightarrow \quad du = \frac{3}{2} x^{1/2} dx \quad \rightarrow \quad x^{1/2} dx = \frac{2}{3} du$$

Então,

$$I = \int \sqrt{x} \cdot \cos(x\sqrt{x}) dx = \int \cos u \cdot \frac{2}{3} du = \frac{2}{3} \sin u + C = \frac{2}{3} \sin(x\sqrt{x}) + C$$

Resposta:  $I = \frac{2}{3} \sin(x\sqrt{x}) + C$ .

i) Vamos fazer a substituição:

$$u = \cos x \quad \rightarrow \quad du = -\sin x \, dx$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int \frac{1}{u^3} \cdot du = - \int u^{-3} \cdot du = - \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2u^2} + C \\
 &= \frac{1}{2\cos^2 x} + C = \frac{1}{2} \sec^2 x + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \sec^2 x + C$ .

j) Vamos fazer a substituição:

$$u = \arctg x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

Então,

$$I = \int \frac{\arctg x}{x^2 + 1} dx = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\arctg^2 x}{2} + C$$

Resposta:  $I = \frac{\arctg^2 x}{2} + C$ .

k) Vamos fazer a substituição:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Então,

$$I = \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

Resposta:  $I = \ln|\ln x| + C$ .

l) Vamos fazer a substituição:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Então,

$$I = \int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

Resposta:  $I = \frac{\ln^4 x}{4} + C$ .

m) Vamos fazer a substituição:

$$u = x + 3 \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \rightarrow \quad x = u - 3$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int x(x+3)^4 dx = \int (u-3)u^4 \cdot du = \int (u^5 - 3u^4) \cdot du = \frac{u^6}{6} - 3\frac{u^5}{5} + C \\
 &= \frac{(x+3)^6}{6} - 3\frac{(x+3)^5}{5} + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{(x+3)^6}{6} - 3\frac{(x+3)^5}{5} + C.$

n) Vamos fazer a substituição:

$$u = x - 1 \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \rightarrow \quad x = u + 1$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \int (u+1)^2 u^{1/2} \cdot du = \int (u^2 + 2u + 1)u^{1/2} \cdot du \\
 &= \int (u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}) du = \frac{u^{7/2}}{7/2} + 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\
 &= 2\frac{u^{7/2}}{7} + 4\frac{u^{5/2}}{5} + 2\frac{u^{3/2}}{3} + C = 2\frac{\sqrt{u^7}}{7} + 4\frac{\sqrt{u^5}}{5} + 2\frac{\sqrt{u^3}}{3} + C \\
 &= 2\frac{\sqrt{(x-1)^7}}{7} + 4\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + 2\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = 2\frac{\sqrt{(x-1)^7}}{7} + 4\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + 2\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C.$

o) Vamos fazer a substituição:

$$u = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad du = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{du}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 = u + 1$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{(u+1) du}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int (u+1)u^{-1/2} du \\
 &= \frac{1}{2} \int (u^{1/2} + u^{-1/2}) du = \frac{1}{2} \left( \frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{u^{1/2}}{1/2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} \left( 2\frac{u^{3/2}}{3} + 2u^{1/2} \right) = \frac{u^{3/2}}{3} + u^{1/2} + C \\
 &= \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + (x^2-1)^{1/2} + C = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + \sqrt{x^2-1} + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + \sqrt{x^2-1} + C.$



**P 4.10**

Resolução:

a) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

Então,

$$I = 4 \int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = 4 \left( x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \right)$$

$$= -4x \cdot \cos x + 4 \int \cos x \, dx = -4x \cdot \cos x + 4 \operatorname{sen} x + C$$

Resposta:  $I = -4(x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x) + C$ .

b) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sec^2(2x) \, dx \quad \rightarrow \quad v = \int \sec^2(2x) \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x)$$

Então,

$$I = \int x \cdot \sec^2(2x) \, dx = \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) - \int \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(2x) \, dx = \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) - \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} \, dx$$

Fazendo a substituição de variável:

$$t = \cos(2x) \quad \rightarrow \quad dt = -2 \operatorname{sen}(2x) \, dx \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) \, dx = \frac{dt}{-2}$$

$$I = \int x \cdot \sec^2(2x) \, dx = \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) - \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{-2} = \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) + \frac{1}{4} \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) + \frac{1}{4} \ln|\cos(2x)| + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{tg}(2x) + \frac{1}{4} \ln|\cos(2x)| + C$ .

c) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^{1/2} dx \quad \rightarrow \quad v = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} x^{3/2} \right) + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) + C.$

d) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^{-4} dx \quad \rightarrow \quad v = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\ln x}{x^4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} \cdot \ln x - \int \left( -\frac{1}{3} x^{-3} \right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{3} \int (x^{-4}) dx \\
 &= -\frac{1}{3x^3} \cdot \ln x + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} x^{-3} \right) + C = -\frac{1}{3x^3} \cdot \ln x - \frac{1}{9x^3} + C \\
 &= -\frac{1}{3x^3} \cdot \left( \ln x + \frac{1}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{3x^3} \cdot \left( \ln x + \frac{1}{3} \right) + C.$

e) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = \arcsen(3x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \arcsen(3x) \, dx = x \cdot \arcsen(3x) - \int x \cdot \left( \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx \\
 &= x \cdot \arcsen(3x) - 3 \int \left( \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx
 \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável:

$$\begin{aligned}
 t = 1 - 9x^2 &\rightarrow dt = -18x dx \rightarrow x \cdot dx = -\frac{dt}{18} \\
 I = \int \arcsen(3x) dx &= x \cdot \arcsen(3x) - 3 \int \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \left(-\frac{dt}{18}\right) \\
 &= x \cdot \arcsen(3x) + \frac{1}{6} \int t^{-1/2} dt = x \cdot \arcsen(3x) + \frac{1}{6} \frac{t^{1/2}}{1/2} + C \\
 &= x \cdot \arcsen(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1 - 9x^2} + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = x \cdot \arcsen(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1 - 9x^2} + C$ .

f) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned}
 u = x^3 &\rightarrow du = 3x^2 dx \\
 dv = \cos x dx &\rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x
 \end{aligned}$$

Então,

$$I = \int x^3 \cdot \cos x dx = x^3 \cdot \sin x - \int 3x^2 \cdot \sin x dx = x^3 \cdot \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx$$

Para esta última integral devemos utilizar outra vez a fórmula de integração por partes:

$$\begin{aligned}
 u = x^2 &\rightarrow du = 2x dx \\
 dv = \sin x &\rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \\
 \int x^3 \cdot \cos x dx &= x^3 \cdot \sin x - 3 \left[ x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx \right] \\
 &= x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cdot \cos x dx
 \end{aligned}$$

Novamente, nesta última integral devemos utilizar outra vez a fórmula de integração por partes:

$$\begin{aligned}
 u = x &\rightarrow du = dx \\
 dv = \cos x &\rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cdot \cos x \, dx &= x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cdot \cos x \, dx \\
&= x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \left[ x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \right] \\
&= x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x + C$ .

g) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned}
u &= x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x dx \\
dv &= e^{-2x} dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2 \cdot e^{-2x} \, dx = x^2 \cdot \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right) - \int 2x \cdot \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} + \int x e^{-2x} \, dx
\end{aligned}$$

Para esta última integral devemos utilizar outra vez a fórmula de integração por partes:

$$\begin{aligned}
u &= x \quad \rightarrow \quad du = dx \\
dv &= e^{-2x} dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2} \\
\int x^2 \cdot e^{-2x} \, dx &= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} + \int x e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} + \left[ \frac{x e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right] \\
&= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \\
&= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-2x}}{-2} \right] = \\
&= -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$ .

h) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned}
u &= \cos(3x) \quad \rightarrow \quad du = -3 \cdot \sin(3x) \, dx \\
dv &= e^{4x} dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^{4x} \cdot \cos(3x) \, dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot \cos(3x) - \int \frac{e^{4x}}{4} \cdot (-3 \cdot \sin(3x)) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{4} \int e^{4x} \sin(3x) \, dx
 \end{aligned}$$

Para esta última integral devemos utilizar outra vez a fórmula de integração por partes:

$$u = \sin(3x) \rightarrow du = 3 \cdot \cos(3x) \, dx$$

$$dv = e^{4x} \, dx \rightarrow v = \int e^{4x} \, dx = \frac{e^{4x}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \int e^{4x} \cdot \cos(3x) \, dx &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{4} \int e^{4x} \sin(3x) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{4} \left[ \frac{e^{4x}}{4} \sin(3x) - \int \frac{e^{4x}}{4} \cdot (3 \cdot \cos(3x)) \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{16} e^{4x} \sin(3x) - \frac{9}{16} \int e^{4x} \cdot \cos(3x) \, dx
 \end{aligned}$$

Observe que a última integral é exatamente a integral que queremos calcular e que denominamos por  $I$ . Então, reescrevendo,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{16} e^{4x} \sin(3x) - \frac{9}{16} I \\
 I + \frac{9}{16} I &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{16} e^{4x} \sin(3x) \\
 \frac{25}{16} I &= \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{16} e^{4x} \sin(3x) \\
 I &= \frac{16}{25} \left( \frac{1}{4} e^{4x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{16} e^{4x} \sin(3x) \right) + C \\
 I &= \frac{1}{25} (4e^{4x} \cdot \cos(3x) + 3e^{4x} \sin(3x)) + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{25} (4e^{4x} \cdot \cos(3x) + 3e^{4x} \sin(3x)) + C$ .

- i) Vamos identificar os termos da integração por partes. Neste caso tanto faz quem você escolhe, você só precisa manter o padrão na segunda escolha:

$$u = \sin(2x) \rightarrow du = 2 \cdot \cos(2x) \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(2x) \cdot \cos x \, dx = \sin(2x) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot (2 \cdot \cos(2x)) \, dx \\ &= \sin(2x) \cdot \sin x - 2 \int \sin x \cdot \cos(2x) \, dx \end{aligned}$$

Para esta última integral devemos utilizar outra vez a fórmula de integração por partes:

$$u = \cos(2x) \rightarrow du = -2 \cdot \sin(2x) \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(2x) \cdot \cos x \, dx = \sin(2x) \cdot \sin x - 2 \int \sin x \cdot \cos(2x) \, dx \\ &= \sin(2x) \cdot \sin x - 2 \left[ \cos(2x) \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot (-2 \cdot \sin(2x)) \, dx \right] \\ &= \sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x + 4 \int \sin(2x) \cdot \cos x \, dx \end{aligned}$$

Observe que a última integral é exatamente a integral que queremos calcular e que denominamos por  $I$ . Então, reescrevendo,

$$I = \sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x + 4I$$

$$I - 4I = \sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x$$

$$-3I = \sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x$$

$$I = -\frac{1}{3} (\sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x) + C$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{3} (\sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x) + C$ .

j) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$u = \arccos x \rightarrow du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dv = x^2 dx \rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \cdot \arccos x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

Para esta última integral vamos fazer substituição de variável:

$$u = 1 - x^2 \rightarrow du = -2x dx \rightarrow x dx = \frac{du}{-2} \rightarrow x^2 = 1 - u$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \cdot \arccos x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x + \frac{1}{3} \left[ \int \frac{(1-u) du}{u^{1/2} (-2)} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{6} \int (1-u) u^{-1/2} du \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{6} \int (u^{-1/2} - u^{1/2}) du \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{6} \left( \frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \left( u^{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3} \right) + C \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \left( \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{x^3}{3} \cdot \arccos x - \frac{1}{3} \left( \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \right) + C.$

k) Vamos identificar os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= \arctg(2x) \rightarrow du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ dv &= x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int x \cdot \arctg(2x) \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg(2x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \left( \frac{2}{1+4x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg(2x) - \int \frac{x^2}{1+4x^2} dx \end{aligned}$$

Para esta última integral vamos fazer divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \left| \begin{array}{l} 4x^2 + 1 \\ -x^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{4} \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+4x^2} dx &= \int \frac{(4x^2+1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}}{4x^2+1} dx = \int \left( \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{4x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{4x^2+1} dx\end{aligned}$$

Fazendo substituição de variável,

$$\begin{aligned}u = 2x &\rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2} \\ \int \frac{1}{4x^2+1} dx &= \int \frac{1}{u^2+1} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} u + C\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}I &= \int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) - \int \frac{x^2}{1+4x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) - \left[ \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{4x^2+1} dx \right] \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(2x) \right] + C \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(2x) + C\end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(2x) + C$ .

- 1) Antes de aplicar o método de integração por partes, para melhor visualizar a integral, podemos fazer substituição de variável. Observe:

$$t = x^2 \rightarrow dt = 2x dx \rightarrow x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

Então,

$$I = \int x^2 \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 dx = \int t \cdot \operatorname{sen} t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t \cdot \operatorname{sen} t dt$$

Agora, identificando os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned}u &= t \rightarrow du = dt \\ dv &= \operatorname{sen} t dt \rightarrow v = -\cos t\end{aligned}$$

Então,



$$\begin{aligned}
 I &= \int x^3 \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin t \, dt = \frac{1}{2} \left( t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) \, dt \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left( t \cdot \cos t - \int \cos t \, dt \right) = -\frac{1}{2} (t \cdot \cos t - \sin t) + C \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 \cdot \cos x^2 - \sin x^2) + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{2} (x^2 \cdot \cos x^2 - \sin x^2) + C$ .

m) Antes de aplicar o método de integração por partes, para melhor visualizar a integral, podemos fazer substituição de variável. Observe:

$$t = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt$$

Então,

$$I = \int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, dx = \int t \cdot \cos t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 \cdot \cos t \, dt$$

Agora, identificando os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned}
 u &= t^2 \quad \rightarrow \quad du = 2t dt \\
 dv &= \cos t \, dt \quad \rightarrow \quad v = \sin t
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \int t^2 \cdot \cos t \, dt = 2 \left[ t^2 \cdot \sin t - \int 2t \cdot \sin t \, dt \right] \\
 &= 2t^2 \cdot \sin t - 4 \int t \cdot \sin t \, dt
 \end{aligned}$$

Devemos fazer integração por partes de novo nesta última integral:

$$\begin{aligned}
 u &= t \quad \rightarrow \quad du = dt \\
 dv &= \sin t \, dt \quad \rightarrow \quad v = -\cos t
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, dx = 2t^2 \cdot \sin t - 4 \int t \cdot \sin t \, dt \\
 &= 2t^2 \cdot \sin t - 4 \left[ t(-\cos t) - \int -\cos t \, dt \right] \\
 &= 2t^2 \cdot \sin t + 4t \cos t - 4 \sin t + C \\
 &= 2\sqrt{x}^2 \cdot \sin \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 4 \sin \sqrt{x} + C \\
 &= 2x \cdot \sin \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 4 \sin \sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = 2x \cdot \sin \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 4 \sin \sqrt{x} + C$ .

- n) Antes de aplicar o método de integração por partes, para melhor visualizar a integral, podemos fazer substituição de variável. Observe:

$$t = x^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

Então,

$$I = \int x^3 \cdot \sec^2(x^2) dx = \int x^2 \cdot x \cdot \sec^2(x^2) dx = \int t \cdot \sec^2 t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t \cdot \sec^2 t dt$$

Agora, identificando os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= t & \rightarrow & \quad du = dt \\ dv &= \sec^2 t dt & \rightarrow & \quad v = \operatorname{tg} t \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 \cdot \sec^2(x^2) dx = \frac{1}{2} \int t \cdot \sec^2 t dt = \frac{1}{2} \left( t \cdot (\operatorname{tg} t) - \int \operatorname{tg} t dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (t \cdot \operatorname{tg} t - \ln|\sec t|) + C = \frac{1}{2} (x^2 \cdot \operatorname{tg} x^2 - \ln|\sec x^2|) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} (x^2 \cdot \operatorname{tg} x^2 - \ln|\sec x^2|) + C$ .

- o) Antes de aplicar o método de integração por partes, para melhor visualizar a integral, podemos fazer substituição de variável. Observe:

$$t = x^2 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int x^5 \cdot \cos(x^2) dx = \int x^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot \cos(x^2) dx \\ &= \int t^2 \cdot \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^2 \cdot \cos t dt \end{aligned}$$

Agora, identificando os termos da integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= t^2 & \rightarrow & \quad du = 2t dt \\ dv &= \cos t dt & \rightarrow & \quad v = \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Então,

$$I = \int x^5 \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int t^2 \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \left( t^2 \cdot \operatorname{sen} t - \int 2t \cdot \operatorname{sen} t dt \right) =$$

Devemos fazer integração por partes de novo nesta última integral:

$$u = t \quad \rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = \sin t \, dt \quad \rightarrow \quad v = -\cos t$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int x^5 \cdot \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} t^2 \cdot \sin t - \int t \cdot \sin t \, dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \cdot \sin t - \left[ t(-\cos t) - \int -\cos t \, dt \right] \\ &= \frac{1}{2} t^2 \cdot \sin t + t \cos t - \sin t + C \\ &= \frac{1}{2} (x^2)^2 \cdot \sin x^2 + x^2 \cos x^2 - \sin x^2 + C \\ &= \frac{1}{2} x^4 \cdot \sin x^2 + x^2 \cos x^2 - \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} x^4 \cdot \sin x^2 + x^2 \cos x^2 - \sin x^2 + C$ .

#### **P 4.12**

Resolução:

- a) Apesar de ser uma integral racional, ela é resolvida facilmente por substituição de variável:

$$t = x^3 - 2 \quad \rightarrow \quad dt = 3x^2 dx \quad \rightarrow \quad x^2 dx = \frac{dt}{3}$$

Logo,

$$I = \int \frac{x^2}{x^3 - 2} \, dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 2| + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 2| + C$ .

- b) Vamos fatorar o denominador do primeiro termo:

$$\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$$

E vamos fazer substituição de variável no primeiro e segundo termos,

$$t = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{dt}{2}$$

$$s = 2x \quad \rightarrow \quad ds = 2 dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{ds}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int \left( \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1} + \frac{2}{1 + 4x^2} \right) dx = \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx + \int \frac{2}{1 + (2x)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{t^2} \frac{dt}{2} + \int \frac{2}{1 + s^2} \frac{ds}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt + \int \frac{1}{1 + s^2} ds \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{t^{-1}}{-1} \right) + \arctan s + C \\
&= -\frac{1}{2t} + \arctan s + C = -\frac{1}{2(x^2 - 1)} + \arctan(2x) + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{2(x^2 - 1)} + \arctan(2x) + C$ .

c) Vamos fazer substituição de variável:

$$\begin{aligned}
t = x^2 + 2x - 10 &\rightarrow dt = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx \rightarrow (x + 1)dx \\
&= \frac{dt}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 10} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x - 10| + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x - 10| + C$ .

d) Vamos fazer substituição de variável:

$$t = x^3 + 2x + 15 \rightarrow dt = (3x^2 + 2)dx$$

Portanto,

$$I = \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 15} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x^3 + 2x + 15| + C$$

Resposta:  $I = \ln|x^3 + 2x + 15| + C$ .

e)  $\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$

Observe que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r}
x^3 \quad | \quad x^2 - 1 \\
-x^3 + x \quad | \quad x \\
\hline
x
\end{array}$$

Ou seja,

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx = \int \left[ \frac{x(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} \right] dx = \int x dx + \int \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

Vamos fazer substituição de variável na segunda integral,

$$t = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{dt}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx = \int x dx + \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$ .

f) Observe que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 1 \quad \Big| \quad x^2 + 1 \\ -x^3 - x \quad \quad \quad x + 1 \\ \hline x^2 - x + 1 \\ -x^2 \quad - 1 \\ \hline -x \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left[ \frac{(x + 1)(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} \right] dx \\ &= \int (x + 1) dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Vamos fazer substituição de variável na segunda integral,

$$t = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{dt}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int (x + 1) dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} \\
 &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|t| + C \\
 &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$ .

g) Observe que o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r}
 3x + 2 \quad \bigg| \quad x + 1 \\
 -3x - 3 \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 -1
 \end{array}$$

Ou seja,

$$I = \int \frac{3x + 2}{x + 1} dx = \int \left[ \frac{3(x + 1) - 1}{x + 1} \right] dx = 3 \int dx - \int \frac{1}{x + 1} dx$$

Vamos fazer substituição de variável na segunda integral,

$$t = x + 1 \quad \rightarrow \quad dt = dx$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{3x + 2}{x + 1} dx = 3 \int dx - \int \frac{1}{x + 1} dx = 3x + \int \frac{1}{t} dt = 3x + \ln|t| + C \\
 &= 3x + \ln|x + 1| + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = 3x + \ln|x + 1| + C$ .

h) Observe que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 5x + 7 \quad \bigg| \quad x + 3 \\
 -x^2 - 3x \quad \quad \quad x + 2 \\
 \hline
 2x + 7 \\
 -2x - 6 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx = \int \left[ \frac{(x + 2)(x + 3) + 1}{x + 3} \right] dx \\ &= \int (x + 2) dx + \int \frac{1}{x + 3} dx \end{aligned}$$

Vamos fazer substituição de variável na segunda integral,

$$t = x + 3 \quad \rightarrow \quad dt = dx$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx = \int (x + 2) dx + \int \frac{1}{x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|t| + C = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x + 3| + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x + 3| + C$ .

i) Observe que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x \quad | \quad x + 1 \\ -2x^2 - 2x \quad | \\ \hline x \quad \quad \quad 2x + 1 \\ -x - 1 \quad \quad \quad \\ \hline -1 \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2 + 3x}{x + 1} dx = \int \left[ \frac{(x + 1)(2x + 1) - 1}{x + 1} \right] dx \\ &= \int (2x + 1) dx - \int \frac{1}{x + 1} dx \end{aligned}$$

Vamos fazer substituição de variável na segunda integral,

$$t = x + 1 \quad \rightarrow \quad dt = dx$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^2 + 3x}{x + 1} dx = \int (2x + 1) dx - \int \frac{1}{x + 1} dx = x^2 + x - \int \frac{1}{t} dt \\ &= x^2 + x - \ln|t| + C = x^2 + x - \ln|x + 1| + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = x^2 + x - \ln|x + 1| + C$ .

**P 4.14**

Resolução:

- a) Como não dá para fazer por substituição de variável, vamos fatorar o denominador:

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ e } x = 2$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 2)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{A(x - 2) + Bx}{x(x - 2)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$1 = A(x - 2) + Bx \quad (*)$$

Vamos resolver (\*), atribuindo valores convenientes a  $x$  na igualdade acima:

Para  $x = 0$ :

$$1 = A(0 - 2) + B(0) \rightarrow -2A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Para  $x = 2$ :

$$1 = A(2 - 2) + B \cdot (2) \rightarrow 2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{1}{x^2 - 2x} dx = \int \left[ \frac{-1/2}{x} + \frac{1/2}{(x - 2)} \right] dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 2} dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x - 2| + C$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x - 2| + C$ .



b) Como não dá para fazer por substituição de variável, vamos fatorar o denominador:

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ e } x = -2$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 2)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{A(x + 2) + Bx}{x(x + 2)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$3x = A(x + 2) + Bx \quad (*)$$

Vamos resolver (\*), atribuindo valores convenientes a  $x$  na igualdade acima:

Para  $x = 0$ :

$$3 \cdot 0 = A(0 + 2) + B(0) \rightarrow 2A = 0 \rightarrow A = 0$$

Para  $x = -2$ :

$$3(-2) = A(-2 + 2) + B \cdot (-2) \rightarrow -2B = -6 \rightarrow B = 3$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{3x}{x^2 + 2x} dx = \int \left[ \frac{0}{x} + \frac{3}{(x + 2)} \right] dx = 3 \int \frac{1}{x + 2} dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = 3 \ln|x + 2| + C$$

Resposta:  $I = 3 \ln|x + 2| + C$ .

c) Vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$(x+1) = A(x-2) + B(x-1) \quad (*)$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes:

Para  $x = 1$ :

$$(1+1) = A(1-2) + B.(1-1) \rightarrow -A = 2 \rightarrow A = -2$$

Para  $x = 2$ :

$$(2+1) = A(2-2) + B.(2-1) \rightarrow B = 3$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx \\ &= \int \left[ \frac{-2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-2)} \right] dx = -2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$$

Resposta:  $I = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$ .

d) Vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.12}}{2.1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ , temos,

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{2x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-4)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{2x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A(x-4) + B(x-3)}{(x-3)(x-4)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$(2x-1) = A(x-4) + B(x-3) \quad (*)$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes:

Para  $x = 3$ :

$$(2.3-1) = A(3-4) + B.(3-3) \rightarrow -A = 5 \rightarrow A = -5$$

Para  $x = 4$ :

$$(2.4-1) = A(4-4) + B.(4-3) \rightarrow B = 7$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x-1}{x^2-7x+12} dx \\ &= \int \left[ \frac{-5}{(x-3)} + \frac{7}{(x-4)} \right] dx = -5 \int \frac{1}{x-3} dx + 7 \int \frac{1}{x-4} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = -5 \ln|x-3| + 7 \ln|x-4| + C$$

Resposta:  $I = -5 \ln|x-3| + 7 \ln|x-4| + C$ .

e) Fatorando o denominador,

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$$

Vamos fatorar a última expressão aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Como na fatora  o,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais:

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x - 2)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)}{x(x + 1)(x - 2)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$4x^2 - 3x + 2 = A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes:

Para  $x = 0$ :

$$4.0^2 - 3.0 + 2 = A(0 + 1)(0 - 2) + B.0(0 - 2) + C.0(0 + 1) \rightarrow -2A = 2 \rightarrow A = -1$$

Para  $x = -1$ :

$$4.(-1)^2 - 3.(-1) + 2 = A(-1 + 1)(-1 - 2) + B.(-1)(-1 - 2) + C.(-1)(-1 + 1) \\ \rightarrow 3B = 9 \rightarrow B = -3$$

Para  $x = 2$ :

$$4.2^2 - 3.2 + 2 = A(2 + 1)(2 - 2) + B.2(2 - 2) + C.2(2 + 1) \rightarrow 6C = 12 \rightarrow C = 2$$

Voltando    integral,

$$I = \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int \left[ \frac{-1}{x} + \frac{-3}{(x + 1)} + \frac{2}{(x - 2)} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = -\ln|x| - 3\ln|x + 1| + 2\ln|x - 2| + C$$

Resposta:  $I = -\ln|x| - 3\ln|x + 1| + 2\ln|x - 2| + C$ .

f) Fatorando o denominador,

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$$

Vamos fatorar a última expressão aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x(x - 1)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$1 = A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher um terceiro número, por exemplo  $x = 2$ :

Para  $x = 0$ :

$$1 = A(0 - 1)^2 + B \cdot 0(0 - 1) + C \cdot 0 \rightarrow A = 1$$

Para  $x = 1$ :

$$1 = A(1 - 1)^2 + B \cdot 1(1 - 1) + C \cdot 1 \rightarrow C = 1$$

Para  $x = 2$ :

$$1 = A(2 - 1)^2 + B \cdot 2(2 - 1) + C \cdot 2 \rightarrow A + 2B + 2C = 1 \rightarrow 1 + 2 \cdot B + 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow$$

$$2B = -2 \rightarrow B = -1$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \left[ \frac{1}{x} + \frac{-1}{(x - 1)} + \frac{1}{(x - 1)^2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = \ln|x| - \ln|x - 1| + \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} + C$$

Resposta:  $I = \ln|x| - \ln|x - 1| - \frac{1}{x-1} + C$ .

g) Neste caso, denominador já está fatorado. Passamos então para a separação em frações parciais,

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher um terceiro número, por exemplo  $x = 0$ :

Para  $x = -1$ :

$$-1 = A(-1+1)^2 + B(-1-1)(-1+1) + C(-1-1) \rightarrow -2C = -1 \rightarrow C = -1/2$$

Para  $x = 1$ :

$$1 = A(1+1)^2 + B(1-1)(1+1) + C(1-1) \rightarrow 4A = 1 \rightarrow A = 1/4$$

Para  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= A(0+1)^2 + B(0-1)(0+1) + C(0-1) \rightarrow A - B - C = 0 \rightarrow 1/4 - B + 1/2 = 1 \\ &\rightarrow B = 1/4 + 1/2 - 1 \rightarrow B = -1/4 \end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left[ \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{(x+1)} + \frac{-1/2}{(x+1)^2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + C$ .

h) Fatorando o denominador,

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4)$$

Vamos fatorar a última expressão aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais,

$$\frac{2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 2)} + \frac{C}{(x + 2)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A(x + 2)^2 + Bx(x + 2) + Cx}{x(x + 2)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$2x - 3 = A(x + 2)^2 + Bx(x + 2) + Cx$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher um terceiro número, por exemplo  $x = 1$ :

Para  $x = 0$ :

$$2 \cdot 0 - 3 = A(0 + 2)^2 + B \cdot 0(0 + 2) + C \cdot 0 \rightarrow 4A = -3 \rightarrow A = -3/4$$

Para  $x = -2$ :

$$2 \cdot (-2) - 3 = A(-2 + 2)^2 + B \cdot (-2)(-2 + 2) + C \cdot (-2) \rightarrow -2C = -7 \rightarrow C = 7/2$$

Para  $x = 1$ :

$$2 \cdot 1 - 3 = A(1 + 2)^2 + B \cdot 1(1 + 2) + C \cdot 1 \rightarrow 9A + 3B + C = -1 \rightarrow$$

$$-27/4 + 3 \cdot B + 7/2 = -1 \rightarrow 3B = -1 + 27/4 - 7/2 \rightarrow B = 3/4$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx = \int \left[ \frac{-3/4}{x} + \frac{3/4}{(x + 2)} + \frac{7/2}{(x + 2)^2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{7}{2}\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$$

Resposta:  $I = -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x+2| - \frac{7}{2(x+2)} + C.$

i) Fatorando o denominador,

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9)$$

Vamos fatorar a última expressão aplicando a fórmula de Bháskara:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais,

$$\frac{3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 3)} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx}{x(x - 3)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$3x + 1 = A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher um terceiro número, por exemplo  $x = 1$ :

Para  $x = 0$ :

$$3 \cdot 0 + 1 = A(0 - 3)^2 + B \cdot 0(0 - 3) + C \cdot 0 \rightarrow 9A = 1 \rightarrow A = 1/9$$

Para  $x = 3$ :

$$3 \cdot 3 + 1 = A(3 - 3)^2 + B \cdot 3(3 - 3) + C \cdot 3 \rightarrow 3C = 10 \rightarrow C = 10/3$$

Para  $x = 1$ :

$$3 \cdot 1 + 1 = A(1 - 3)^2 + B \cdot 1(1 - 3) + C \cdot 1 \rightarrow 4A - 2B + C = 4 \rightarrow$$



$$4/9 - 2B + 10/3 = 4 \rightarrow 2B = 4/9 + 10/3 - 4 \rightarrow B = -1/9$$

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{3x+1}{x^3-6x^2+9x} dx = \int \left[ \frac{1/9}{x} + \frac{-1/9}{(x-3)} + \frac{10/3}{(x-3)^2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{9} \ln|x-3| + \frac{10}{3} \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{9} \ln|x-3| - \frac{10}{3(x-3)} + C.$

j) Neste caso, denominador já está fatorado. Passamos então para a separação em frações parciais,

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A(x+1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$x^2+1 = A(x+1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^2$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher mais dois números, por exemplo  $x = 0$  e

$x = 1$ :

Para  $x = -1$ :

$$\begin{aligned} 2 &= A(-1+1)(-1-2)^2 + B(-1-2)^2 + C(-1+1)^2(x-2) + D(-1+1)^2 \\ &\rightarrow 9B = 2 \rightarrow B = 2/9 \end{aligned}$$

Para  $x = 2$ :

$$\begin{aligned} 5 &= A(2+1)(2-2)^2 + B(2-2)^2 + C(2+1)^2(2-2) + D(2+1)^2 \\ &\rightarrow 9D = 5 \rightarrow D = 5/9 \end{aligned}$$

Para  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
1 &= A(0+1)(0-2)^2 + B(0-2)^2 + C(0+1)^2(0-2) + D(0+1)^2 \\
\rightarrow 4A + 4B - 2C + D &= 1 \rightarrow 4A + \frac{8}{9} - 2C + \frac{5}{9} = 1 \rightarrow 4A - 2C = 1 - \frac{13}{9} \\
\rightarrow 4A - 2C &= -\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Para  $x = 1$ :

$$\begin{aligned}
2 &= A(1+1)(1-2)^2 + B(1-2)^2 + C(1+1)^2(1-2) + D(1+1)^2 \\
\rightarrow 2A + B - 4C + 4D &= 2 \rightarrow 2A + \frac{2}{9} - 4C + \frac{20}{9} = 2 \rightarrow 2A - 4C = 2 - \frac{22}{9} \\
\rightarrow 2A - 4C &= -\frac{4}{9} \rightarrow A - 2C = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema entre C e D:

$$\begin{cases} 4A - 2C = -\frac{4}{9} \\ A - 2C = -\frac{2}{9} \end{cases} \rightarrow 3A = -\frac{2}{9} \rightarrow A = -\frac{2}{27} \text{ e } 2C = A + \frac{2}{9} = -\frac{2}{27} + \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$$

logo,  $C = \frac{4}{27}$ .

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-2)^2} dx = \int \left[ \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} + \frac{\frac{2}{9}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{4}{27}}{x-2} + \frac{\frac{5}{9}}{(x-2)^2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = -\frac{2}{27} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{4}{27} \ln|x-2| + \frac{5}{9} \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$\text{Resposta: } I = -\frac{2}{27} \ln|x+1| + \frac{4}{27} \ln|x-2| - \frac{2}{9(x+1)} - \frac{5}{9(x-2)} + C.$$

k) Neste caso, denominador já está fatorado. Passamos então para a separação em frações parciais,

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3(x-2)} = \frac{Ax^2(x-2) + Bx(x-2) + C(x-2) + Dx^3}{x^3(x-2)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$3x^2 - 1 = Ax^2(x-2) + Bx(x-2) + C(x-2) + Dx^3$$

Podemos atribuir valores convenientes a  $x$ , ou seja, as raízes mas, neste caso, não será suficiente. Vamos então, escolher outros dois números, por exemplo

$x = 1$  e  $x = -1$ :

Para  $x = 0$ :

$$-1 = A \cdot 0^2(0 - 2) + B \cdot 0(0 - 2) + C(0 - 2) + D \cdot 0^3 \rightarrow -2C = -1 \rightarrow C = 1/2$$

Para  $x = 2$ :

$$3 \cdot 2^2 - 1 = A \cdot 2^2(2 - 2) + B \cdot 2(2 - 2) + C(2 - 2) + D \cdot 2^3 \rightarrow 8D = 11 \rightarrow D = 11/8$$

Para  $x = 1$ :

$$3 \cdot 1^2 - 1 = A \cdot 1^2(1 - 2) + B \cdot 1(1 - 2) + C(1 - 2) + D \cdot 1^3$$

$$\rightarrow -A - B - C + D = 2 \rightarrow -A - B - 1/2 + 11/8 = 2 \rightarrow -A - B = 2 + 1/2 - 11/8$$

$$\rightarrow -A - B = 9/8$$

Para  $x = -1$ :

$$3 \cdot (-1)^2 - 1 = A \cdot (-1)^2(-1 - 2) + B \cdot (-1)(-1 - 2) + C(-1 - 2) + D \cdot (-1)^3$$

$$\rightarrow -3A + 3B - 3C + D = 2 \rightarrow -3A + 3B - 3/2 + 11/8 = 2 \rightarrow$$

$$-3A + 3B = 2 + 3/2 - 11/8 \rightarrow -3A + 3B = 17/8$$

Resolvendo o sistema entre A e B:

$$\begin{cases} -3A - 3B = 27/8 \\ -3A + 3B = 17/8 \end{cases} \rightarrow -6A = 44/8 \rightarrow A = -11/12 \text{ e } -B = 9/8 + A = 9/8 - 11/12 = 5/24$$

logo,  $B = -5/24$ .

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{3x^2 - 1}{x^3(x - 2)} dx = \int \left[ -\frac{11/12}{x} - \frac{5/24}{x^2} + \frac{1/2}{x^3} + \frac{11/8}{x - 2} \right] dx$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas segunda e terceira integrais, temos:

$$I = -\frac{11}{12} \ln|x| - \frac{5}{24} \left( \frac{x^{-1}}{-1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right) + \frac{11}{8} \ln|x - 2| + C$$

Resposta:  $I = -\frac{11}{12} \ln|x| + \frac{11}{8} \ln|x - 2| + \frac{5}{24x} - \frac{1}{4x^2} + C$ .

- 1) Observe que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 + x^2 + 2x \\ \hline x^2 + 2x \\ -x^2 + x + 2 \\ \hline 3x + 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ x + 1 \end{array} \right.$$

Ou seja,

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx = \int \left[ x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} \right] dx$$

Vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para  $x^2 - x - 2 = 0$ :

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Então, tomamos o integrando da segunda integral e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x + 1)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{A(x + 1) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$3x + 2 = A(x + 1) + B(x - 2) \quad (*)$$

Vamos resolver (\*), atribuindo valores convenientes a  $x$  na igualdade acima:

Para  $x = 2$ :

$$3 \cdot 2 + 2 = A(2 + 1) + B(2 - 2) \rightarrow 3A = 8 \rightarrow A = 8/3$$

Para  $x = -1$ :

$$3(-1) + 2 = A(-1 + 1) + B(-1 - 2) \rightarrow -3B = -1 \rightarrow B = 1/3$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left[ x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} \right] dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \left[ \frac{8/3}{(x-2)} + \frac{1/3}{(x+1)} \right] dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx
 \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x-3| + C$$

Resposta:  $I = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x-3| + C.$

m) Observe que o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 1 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 3x - 4 \\ -x^2 - 3x + 4 \end{array} \right. \\
 \hline
 -x + 3
 \end{array}$$

Ou seja,

$$I = \int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x - 4} dx = \int \left[ 1 + \frac{-x + 3}{x^2 + 3x - 4} \right] dx$$

Vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para

$$x^2 + 3x - 4 = 0:$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

Então, tomamos o integrando da segunda integral e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{-x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+4)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{-x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{A(x + 4) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 4)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$-x + 3 = A(x + 4) + B(x - 1) \quad (*)$$

Vamos resolver (\*), atribuindo valores convenientes a  $x$  na igualdade acima:

Para  $x = 1$ :

$$-1 + 3 = A(1 + 4) + B(1 - 1) \rightarrow 5A = 2 \rightarrow A = \frac{2}{5}$$

Para  $x = -4$ :

$$-(-4) + 3 = A(-4 + 4) + B(-4 - 1) \rightarrow -5B = 7 \rightarrow B = -\frac{7}{5}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ 1 + \frac{-x + 3}{x^2 + 3x - 4} \right] dx = x + \int \left[ \frac{\frac{2}{5}}{(x - 1)} + \frac{-\frac{7}{5}}{(x + 4)} \right] dx = \\ &= x + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{7}{5} \int \frac{1}{x + 4} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = x + \frac{2}{5} \ln|x - 1| - \frac{7}{5} \ln|x + 4| + C$$

Resposta:  $I = x + \frac{2}{5} \ln|x - 1| - \frac{7}{5} \ln|x + 4| + C$ .

n) Observe que o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r} x^2 + 3 \\ -x^2 - 2x + 24 \\ \hline -2x + 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{r} x^2 + 2x - 24 \\ 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Ou seja,

$$I = \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x - 24} dx = \int \left[ 1 + \frac{-2x + 25}{x^2 + 2x - 24} \right] dx$$

Vamos fatorar o denominador aplicando a fórmula de Bháskara para  $x^2 + 2x - 24 = 0$ :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-24)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Como na fatoração,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , temos,

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 4)(x + 6)$$

Então, tomamos o integrando da segunda integral e separamos em frações parciais, cujos denominadores são os fatores:

$$\frac{-2x + 25}{x^2 + 2x - 24} = \frac{A}{(x - 4)} + \frac{B}{(x + 6)}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{-2x + 25}{x^2 + 2x - 24} = \frac{A(x + 6) + B(x - 4)}{(x - 4)(x + 6)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$-2x + 25 = A(x + 6) + B(x - 4) \quad (*)$$

Vamos resolver (\*), atribuindo valores convenientes a  $x$  na igualdade acima:

Para  $x = 4$ :

$$-2 \cdot 4 + 25 = A(4 + 6) + B(4 - 4) \rightarrow 10A = 17 \rightarrow A = 17/10$$

Para  $x = -6$ :

$$-2(-6) + 25 = A(-6 + 6) + B(6 - 4) \rightarrow 2B = 37 \rightarrow B = 37/2$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ 1 + \frac{-2x + 25}{x^2 + 2x - 24} \right] dx = x + \int \left[ \frac{17/10}{(x - 4)} + \frac{37/2}{(x + 6)} \right] dx = \\ &= x + \frac{17}{10} \int \frac{1}{x - 4} dx + \frac{37}{2} \int \frac{1}{x + 6} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas integrais acima, temos:

$$I = x + \frac{17}{10} \ln|x - 4| + \frac{37}{2} \ln|x + 6| + C$$

Resposta:  $I = x + \frac{17}{10} \ln|x - 4| + \frac{37}{2} \ln|x + 6| + C$ .

o) Neste caso, denominador já está fatorado. Passamos então para a separação em frações parciais,

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)}{(x^2 + 1)^2}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$x^3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$

Neste caso, como não temos raízes reais, torna-se mais fácil fazer igualdade de polinômios e igualar os coeficientes dos termos semelhantes:

$$x^3 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

Então,

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ A + C = 0 \rightarrow C = -1 \\ B + D = 0 \rightarrow D = 0 \end{cases}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \left[ \frac{1 \cdot x + 0}{(x^2 + 1)} + \frac{(-1)x + 0}{(x^2 + 1)^2} \right] dx \\ &= \int \left[ \frac{x}{(x^2 + 1)} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right] dx \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável:

$$t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ \frac{x}{(x^2 + 1)} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right] dx = \int \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right] \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{2} \left( \frac{t^{-1}}{-1} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{1}{2t} + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$



p) Observe que o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Então, devemos primeiro fazer a divisão de polinômio:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 3x^2 + 2x - 4 \\
 \underline{-2x^3 - 8x} \\
 -3x^2 - 6x - 4 \\
 \underline{3x^2 + 12} \\
 6x - 4
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x^2 + 4 \\
 \hline
 2x - 3
 \end{array} \right.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4} dx = \int \left[ 2x - 3 + \frac{6x - 4}{x^2 + 4} \right] dx \\
 &= \int \left[ 2x - 3 + \frac{6x}{x^2 + 4} - \frac{4}{x^2 + 4} \right] dx
 \end{aligned}$$

Vamos separar em quatro integrais e resolver as duas últimas por substituição de variável:

$$I = \int 2x dx - 3 \int dx + 6 \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - 4 \int \frac{x}{4 \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx$$

$$t = x^2 + 4 \quad \rightarrow dt = 2x dx \quad \rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$s = \frac{x}{2} \quad \rightarrow ds = \frac{dx}{2} \quad \rightarrow 2ds = dx$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
 I &= \int 2x dx - 3 \int dx + 6 \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - 4 \int \frac{x}{4 \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx \\
 &= x^2 - 3x + 6 \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} - \int \frac{1}{s^2 + 1} \cdot 2ds = \\
 &= x^2 - 3x + 3 \ln|t| - 2 \arctan s + C \\
 &= x^2 - 3x + 3 \ln|x^2 + 4| - 2 \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + C
 \end{aligned}$$

Resposta:  $I = x^2 - 3x + 3 \ln|x^2 + 4| - 2 \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + C$ .

q) Fatorando o denominador,

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Então, tomamos o integrando e separamos em frações parciais:

$$\frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

Neste caso, como não temos raízes reais suficiente para resolver o sistema, torna-se mais fácil fazer igualdade de polinômios e igualar os coeficientes dos termos semelhantes:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 + 2x - 1 &= A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1) \\ &= Ax^3 + Ax + Ax^2 + A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D \\ &= (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} A + B + C = 2 & (1) \\ A - B + D = 1 & (2) \\ A + B - C = 2 & (3) \\ A - B - D = -1 & (4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B + C = 2 \\ A + B - C = 2 \end{cases} \rightarrow 2C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\begin{cases} A - B + D = 1 \\ A - B - D = -1 \end{cases} \rightarrow 2D = 2 \rightarrow D = 1$$

Então temos,

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = 0 \end{cases} \rightarrow 2A = 2 \rightarrow A = 1 \text{ e } B = A = 1$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx = \int \left[ \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{0 \cdot x + 1}{x^2 + 1} \right] dx \\ &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudanças de variável convenientes nas primeira e segunda integral,

$$I = \int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx = \ln|x - 1| + \ln|x + 1| + \arctan x + C$$

Resposta:  $I = \ln|x - 1| + \ln|x + 1| + \arctan x + C$ .

r) Fatorando o denominador pela diferença de cubos:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , temos:

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$$

Separando o integrando em frações parciais:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$1 = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)$$

Neste caso, vamos preferir desenvolver o produto e fazer igualdade de polinômios:

$$\begin{aligned} 1 &= Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C \\ &= (A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x + (4A + 2C) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 2B + C = 0 \\ 4A + 2C = 1 \end{cases} \rightarrow A = -B \rightarrow \begin{cases} 4B + C = 0 \\ -4B + 2C = 1 \end{cases} \rightarrow 3C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{3} \text{ e } B = -\frac{C}{4}$$

Neste caso,  $B = -\frac{1}{12}$  e  $A = \frac{1}{12}$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^3 + 8} dx \\ &= \int \left[ \frac{1/12}{x + 2} + \frac{-1/12x + 1/3}{x^2 - 2x + 4} \right] dx \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{1}{x + 2} dx - \frac{1}{12} \int \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 4} dx \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{1}{x + 2} dx - \frac{1}{12} \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 4} dx + \frac{1}{12} \int \frac{3}{x^2 - 2x + 4} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável nas primeira e segunda integrais,

$$t = x + 2 \rightarrow dt = dx$$

$$s = x^2 - 2x + 4 \rightarrow ds = (2x - 2)dx \rightarrow (x - 1)dx = \frac{ds}{2}$$

Completando quadrados na terceira integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^2 - 2x + 4} dx &= \int \frac{3}{(x^2 - 2x + 1) + 3} dx \\ &= \int \frac{3}{(x - 1)^2 + 3} dx = \int \frac{3}{3 \left[ \left( \frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} dx\end{aligned}$$

E ainda fazendo substituição de variável na integral acima,

$$z = \frac{(x - 1)}{\sqrt{3}} \rightarrow dx = \sqrt{3} dz$$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{12} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{12} \int \frac{1}{s} \frac{ds}{2} + \frac{1}{12} \int \frac{1}{z^2 + (1)^2} \sqrt{3} dz = \\ &= \frac{1}{12} \ln|t| - \frac{1}{24} \ln|s| + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arc\,tg} z + C \\ &= \frac{1}{12} \ln|x + 2| - \frac{1}{24} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x-1}{\sqrt{3}} \right) + C\end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{12} \ln|x + 2| - \frac{1}{24} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.$

s)  $I = \int \frac{2x}{x^3 - 1} dx$  Fatorando o denominador pela diferença de cubos:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , temos:

$$x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1^2)$$

Separando o integrando em frações parciais:

$$\frac{2x}{x^3 - 1} = \frac{2x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Reduzindo a última soma ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{2x}{x^3 - 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

Observe que temos uma igualdade de frações cujos denominadores são iguais, portanto, os numeradores também devem ser iguais, ou seja,

$$2x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Neste caso, vamos preferir desenvolver o produto e fazer igualdade de polinômios:

$$\begin{aligned}2x &= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \\ &= (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 2 \\ A - C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = -B \\ A = C \end{matrix} \rightarrow 3A = 2 \rightarrow A = 2/3$$

Neste caso,  $B = -\frac{2}{3}$  e  $C = \frac{2}{3}$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x}{x^3 - 1} dx \\ &= \int \left[ \frac{2/3}{x-1} + \frac{-2/3x + 2/3}{x^2 + x + 1} \right] dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{2}{3} \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{2}{3} \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{2}{x^2 + x + 1} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável nas primeira e segunda integrais,

$$t = x - 1 \rightarrow dt = dx$$

$$s = x^2 + x + 1 \rightarrow ds = (2x + 2)dx \rightarrow (x + 1)dx = \frac{ds}{2}$$

Completando quadrados na terceira integral,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{2}{(x^2 + x + 1/4) + 3/4} dx \\ &= \int \frac{2}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \int \frac{2}{\frac{3}{4} \left[ \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} dx \end{aligned}$$

E ainda fazendo substituição de variável na integral acima,

$$z = \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dz$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x}{x^3 - 1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{1}{s} \frac{ds}{2} + \frac{2}{13} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{1}{z^2 + (1)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} dz = \\ &= \frac{2}{3} \ln|t| - \frac{1}{3} \ln|s| + \frac{4\sqrt{3}}{39} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + C \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{4\sqrt{3}}{39} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{4\sqrt{3}}{39} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$

**P 4.16**

Resolução:

$$a) I = \int \cos^6(2x) \cdot \cos(2x) dx = \int (1 - \sin^2(2x))^3 \cdot \cos(2x) dx$$

Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \sin(2x) \rightarrow du = 2 \cos(2x) \cdot dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - \sin^2(2x))^3 \cdot \cos(2x) dx = \int (1 - u^2)^3 \cdot \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du = \frac{1}{2} \left( u - 3 \frac{u^3}{3} + 3 \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin(2x) - \sin^3(2x) + \frac{3}{5} \sin^5(2x) - \frac{1}{7} \sin^7(2x) \right) + C \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{1}{2} \left( \sin(2x) - \sin^3(2x) + \frac{3}{5} \sin^5(2x) - \frac{1}{7} \sin^7(2x) \right) + C.$$

$$b) I = \int (1 - \cos^2(5x)) dx = \int \sin^2(5x) \cdot dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = 5x \rightarrow du = 5dx$$

$$I = \int \sin^2(5x) \cdot dx = \int \sin^2 u \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \sin^2 u du$$

Nesse caso, a substituição é,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5} \int \sin^2 u du = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1 - \cos(2u)}{2} \right) du = \frac{1}{10} \left( u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right) + C \\ &= \frac{1}{10} \left( 5x - \frac{1}{2} \sin(10x) \right) + C \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{1}{10} \left( 5x - \frac{1}{2} \sin(10x) \right) + C.$$

c) Nesse caso, a substituição é,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin^4(2x) \, dx = \int \sin^2(2x) \cdot \sin^2(2x) \, dx \\
&= \int \left( \frac{1 - \cos(4x)}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 - \cos(4x)}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos(4x) + \cos^2(4x)) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int 1 dx - 2 \int \cos(4x) dx + \int \left( \frac{1 + \cos(8x)}{2} \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int 1 dx - 2 \int \cos(4x) dx + \frac{1}{2} \left( \int 1 dx + \int \cos(8x) dx \right) \right]
\end{aligned}$$

Fazendo substituições de variável nas segunda e quarta integrais,

$$t = 4x \quad \rightarrow \quad dt = 4dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{4}$$

$$s = 8x \quad \rightarrow \quad ds = 8dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{ds}{8}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \left[ x - 2 \int \cos(t) \frac{dt}{4} + \frac{1}{2} \left( x + \int \cos(s) \frac{ds}{8} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ x - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{8} \sin s \right) \right] + C \\
&= \frac{1}{8} \left[ 3x - \sin(4x) + \frac{1}{8} \sin(8x) \right] + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{8} \left[ 3x - \sin(4x) + \frac{1}{8} \sin(8x) \right] + C$ .

d) Lembrando que  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  e  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$  vamos substituir na integral,

$$I = \int \frac{\cos^2 x \cdot \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\sec^2 x)^2} dx = \int \frac{1}{\sec^4 x} dx = \int \cos^4 x \, dx$$

Nesse caso, a substituição é,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^4 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \left( \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int 1 dx + 2 \int \cos(2x) dx + \int \left( \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \int 1 dx + 2 \int \cos(2x) dx + \frac{1}{2} \left( \int 1 dx + \int \cos(4x) dx \right) \right]
\end{aligned}$$

Fazendo substituições de variável nas segunda e quarta integrais,

$$t = 2x \quad \rightarrow \quad dt = 2dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2}$$

$$s = 4x \quad \rightarrow \quad ds = 4dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{ds}{4}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \left[ x + 2 \int \cos(t) \frac{dt}{2} + \frac{1}{2} \left( x + \int \cos(s) \frac{ds}{4} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ x + \sin t + \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{4} \sin s \right) \right] + C \\
&= \frac{1}{8} \left[ 3x + 2 \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x) \right] + C
\end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{8} \left[ 3x + 2 \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x) \right] + C.$

e) Basta fazermos substituição de variável,

$$u = \sin(2x) \quad \rightarrow \quad du = 2 \cos(2x) \cdot dx$$

$$I = \int \sin^2(2x) \cdot \cos(2x) dx = \int u^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{6} \sin^3(2x) + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{6} \sin^3(2x) + C.$

f) Basta fazermos substituição de variável,

$$u = \cos(4x) \quad \rightarrow \quad du = -4 \sin(4x) \cdot dx$$

$$I = \int \cos^4(4x) \cdot \sin(4x) dx = \int u^4 \frac{du}{-4} = -\frac{1}{4} \left( \frac{u^5}{5} \right) + C = -\frac{1}{20} \cos^5(4x) + C$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{20} \cos^5(4x) + C.$

g)  $I = \int \sin^3(3x) \cdot \cos^2(3x) dx = \int \sin^2(3x) \cdot \cos^2(3x) \cdot \sin(3x) dx =$   
 $\int (1 - \cos^2(3x)) \cdot \cos^2(3x) \cdot \cos(3x) dx$



Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \cos(3x) \rightarrow du = -3 \sin(3x) \cdot dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - \cos^2(3x)) \cdot \cos^2(3x) \cdot \cos(3x) dx = \int (1 - u^2) u^2 \left( \frac{du}{-3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \int (u^2 - u^4) du = -\frac{1}{3} \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + C \\ &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} \right) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{3} \left( \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} \right) + C.$

h)  $I = \int \cos^5(2x + 1) \cdot \sin^4(2x + 1) dx = \int \cos^4(2x + 1) \cdot \sin^4(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) dx$   
 $1) dx = \int (1 - \sin^2(2x + 1))^2 \sin^4(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) dx$

Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \sin(2x + 1) \rightarrow du = 2 \cos(2x + 1) \cdot dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - \sin^2(2x + 1))^2 \sin^4(2x + 1) \cdot \cos(2x + 1) dx = \int (1 - u^2)^2 u^4 \left( \frac{du}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - 2u^2 + u^4) u^4 du = \frac{1}{2} \int (u^4 - 2u^6 + u^8) du \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{u^5}{5} - 2 \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^5(2x + 1)}{5} - 2 \frac{\sin^7(2x + 1)}{7} + \frac{\sin^9(2x + 1)}{9} \right) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^5(2x+1)}{5} - 2 \frac{\sin^7(2x+1)}{7} + \frac{\sin^9(2x+1)}{9} \right) + C.$

i)  $I = \int \sec^4(3x) dx = \int \sec^2(3x) \cdot \sec^2(3x) dx = \int (1 + \tan^2(3x)) \cdot \sec^2(3x) dx$

Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \tan(3x) \rightarrow du = 3 \sec^2(3x) dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (1 + \tan^2(3x)) \cdot \sec^2(3x) dx = \int (1 + u^2) \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int (1 + u^2) du \\ &= \frac{1}{3} \left( u + \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{3} \tan(3x) + \frac{1}{9} \tan^3(3x) + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{3} \tan(3x) + \frac{1}{9} \tan^3(3x) + C.$

j)  $I = \int (\operatorname{cosec}^2(3x) - 1) \cdot \cotg(3x) dx = \int \operatorname{cosec}^2(3x) \cotg(3x) dx - \int \cotg(3x) dx.$

Vamos fazer substituição de variável,

$$t = \cotg(3x) \rightarrow dt = -3\operatorname{cosec}^2(3x) dx$$

$$s = 3x \rightarrow ds = 3dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{cosec}^2(3x) \cotg(3x) dx - \int \cotg(3x) dx = \int t \cdot \frac{dt}{-3} - \int \cotg s \frac{ds}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \left( \frac{t^2}{2} + \ln|\operatorname{sen} s| \right) + C = -\frac{1}{6} \cotg^2(3x) - \frac{1}{3} \ln|\operatorname{sen}(3x)| + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{6} \cotg^2(3x) - \frac{1}{3} \ln|\operatorname{sen}(3x)| + C.$

k)  $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx$

Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \sec x \rightarrow du = \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx = \int (u^2 - 1)^2 u^2 \cdot du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^2 du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= \left( \frac{u^7}{7} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{\sec^7 x}{7} - 2 \frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{\sec^7 x}{7} - 2 \frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C$

l) Fazendo substituição de variável,

$$u = \operatorname{tg}(2x) \rightarrow du = 2 \sec^2(2x) dx$$

$$I = \int \operatorname{tg}^3(2x) \cdot \sec^2(2x) dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{\operatorname{tg}^4(2x)}{8} + C$$

Resposta:  $I = \frac{\operatorname{tg}^4(2x)}{8} + C$

m)  $I = \int \cotg^2(3x) \cdot \operatorname{cosec}^2(3x) \cdot \cotg(3x) \cdot \operatorname{cosec}(3x) dx =$

$$\int (\operatorname{cosec}^2(3x) - 1) \cdot \operatorname{cosec}^2(3x) \cdot \cotg(3x) \cdot \operatorname{cosec}(3x) dx$$

Agora, fazemos substituição de variável,

$$u = \operatorname{cosec}(3x) \rightarrow du = -3 \cdot \cotg(3x) \cdot \operatorname{cosec}(3x) dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int (u^2 - 1) u^2 \cdot \frac{du}{-3} = -\frac{1}{3} \int (u^4 - u^2) du = -\frac{1}{3} \left( \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) + C \\ &= -\frac{\operatorname{cosec}^5(3x)}{15} + \frac{\operatorname{cosec}^3 x}{9} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{\operatorname{cosec}^5(3x)}{15} + \frac{\operatorname{cosec}^3 x}{9} + C$

n) Vamos fazer substituição de variável,

$$u = \cotg(4x) \rightarrow du = -4 \operatorname{cosec}^2(4x) dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int \cotg^5(4x) \cdot \operatorname{cosec}^2(4x) dx = \int u^5 \cdot \frac{du}{-4} = -\frac{1}{4} \int u^5 du = -\frac{u^6}{24} + C \\ &= -\frac{\cotg^6(4x)}{24} + C \end{aligned}$$

Resposta:  $I = -\frac{\cotg^6(4x)}{24} + C$

#### P 4.18

Resolução:

a) Observe que:

$$\sqrt{1 - 36x^2} = \sqrt{1^2 - (6x)^2} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = 6x$$

Fazendo a substituição,

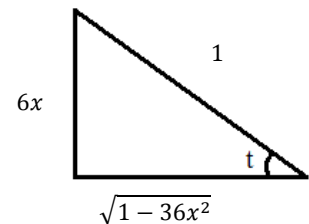
$$6x = 1 \cdot \operatorname{sen} t \rightarrow 6dx = \cos t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{sen} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

temos,

$$\operatorname{sen} t = \frac{6x}{1}$$



Chamamos o cateto oposto de  $6x$  e a hipotenusa de 1. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$1^2 = (6x)^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 1 - 36x^2 \rightarrow y = \sqrt{1 - 36x^2}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int \sqrt{1 - 36x^2} dx = \int \sqrt{1 - (\operatorname{sen} t)^2} \frac{\cos t \cdot dt}{6} = \frac{1}{6} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t \cdot dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica fundamental, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int \cos^2 t \cdot dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + C \end{aligned}$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\sin t = 6x \rightarrow t = \arcsin(6x)$$

$$\begin{aligned}\sin(2t) &= 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{(1 - \sin^2 t)} = 2 \cdot (6x) \cdot \sqrt{1 - (6x)^2} \\ &= 12x \sqrt{1 - 36x^2}\end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$I = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}\arcsin(6x) + \frac{12x\sqrt{1-36x^2}}{4} + C$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2}\arcsin(6x) + 3x\sqrt{1-36x^2} + C.$

b) Observe que:

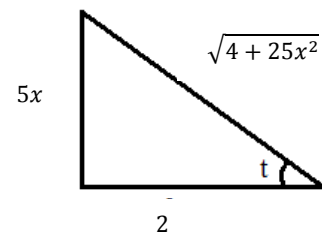
$$\sqrt{4 + 25x^2} = \sqrt{2^2 + (5x)^2} \rightarrow a = 2 \text{ e } u(x) = 5x$$

Fazendo a substituição,

$$5x = 2 \cdot \operatorname{tg} t \rightarrow 5 dx = 2 \cdot \sec^2 t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$



temos,

$$\operatorname{tg} t = \frac{5x}{2}$$

Chamamos o cateto oposto de  $5x$  e o cateto adjacente de  $2$ . Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 2^2 + (5x)^2 \rightarrow y^2 = 4 + 25x^2 \rightarrow y = \sqrt{4 + 25x^2}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{4 + 25x^2} dx = \int \sqrt{4 + (2 \cdot \operatorname{tg} t)^2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sec^2 t \cdot dt \\ &= \frac{2}{5} \int \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt = \frac{2}{5} \int \sqrt{4(1 + \operatorname{tg}^2 t)} \cdot \sec^2 t \cdot dt =\end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$I = \frac{4}{5} \int \sqrt{\sec^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt = \frac{4}{5} \int \sec^3 t \cdot dt$$

Essa integral foi resolvida no exemplo 4.33. Então,

$$I = \frac{4}{5} \int \sec^3 t \cdot dt = \frac{2}{5} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que pela identidade (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t = \frac{5x}{2} \quad \text{e} \quad \sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1 &= \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + 1 = \frac{25x^2 + 4}{4} \\ \rightarrow \sec t &= \frac{\sqrt{25x^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|] + C \\ &= \frac{2}{5} \left[ \frac{\sqrt{25x^2 + 4}}{2} \cdot \frac{5x}{2} + \ln \left| \frac{\sqrt{25x^2 + 4}}{2} + \frac{5x}{2} \right| \right] + C = \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{2}{5} \left[ \frac{5x\sqrt{25x^2 + 4}}{4} + \ln \left| \frac{\sqrt{25x^2 + 4}}{2} + \frac{5x}{2} \right| \right] + C.$$

c) Note que:

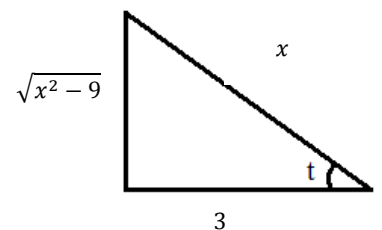
$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 3^2} \quad \rightarrow \quad a = 3 \quad \text{e} \quad u(x) = x$$

Fazendo a substituição,

$$x = 3 \sec t \quad \rightarrow \quad dx = 3 \sec t \cdot \operatorname{tg} t \, dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\sec t = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$



temos,

$$\sec t = \frac{x}{3}$$

Chamando a hipotenusa de  $x$  e o cateto adjacente de 3 e aplicando o teorema de Pitágoras,

$$x^2 = 3^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} dx = \int \frac{1}{(3 \sec t)^3 \sqrt{(3 \sec t)^2 - 9}} \cdot 3 \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt \\
 &= \frac{3}{27} \int \frac{\sec t \cdot \operatorname{tg} t}{\sec^3 t \sqrt{9 \sec^2 t - 9}} \cdot dt = \frac{1}{9} \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec^2 t \sqrt{9(\sec^2 t - 1)}} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{27} \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec^2 t \sqrt{(\sec^2 t - 1)}} \cdot dt
 \end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{27} \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec^2 t \sqrt{(\sec^2 t - 1)}} \cdot dt = \frac{1}{27} \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec^2 t \sqrt{\operatorname{tg}^2 t}} \cdot dt = \frac{1}{27} \int \frac{1}{\sec^2 t} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{27} \int \cos^2 t \cdot dt = \frac{1}{27} \int \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{54} \left[ \int 1 dt + \int \cos(2t) dt \right] = \frac{1}{54} \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right] + C
 \end{aligned}$$

Voltando à variável  $x$ :

$$\begin{aligned}
 \sec t &= \frac{x}{3} \rightarrow t = \operatorname{arc} \sec \left( \frac{x}{3} \right) \\
 \sin(2t) &= 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \cos t = 2 \sqrt{1 - \left( \frac{3}{x} \right)^2} \cdot \left( \frac{3}{x} \right) \\
 &= 2 \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2}} \cdot \frac{3}{x}
 \end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{54} \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right] + C = \frac{1}{54} \left[ \operatorname{arc} \sec \left( \frac{x}{3} \right) + \frac{1}{2} 2 \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} \right] + C \\
 &= \frac{1}{54} \left[ \operatorname{arc} \sec \left( \frac{x}{3} \right) + 3 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \right] + C
 \end{aligned}$$

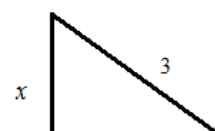
Resposta:  $I = \frac{1}{54} \left[ \operatorname{arc} \sec \left( \frac{x}{3} \right) + 3 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \right] + C.$

d) Observe que:

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2^2 - x^2} \rightarrow a = 2 \text{ e } u(x) = x$$

Fazendo a substituição,

$$x = 2 \cdot \sin t \rightarrow dx = 2 \cos t \cdot dt$$



Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\text{sen } t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad 2$$

temos,

$$\text{sen } t = \frac{x}{2} \quad \sqrt{4-x^2}$$

Chamamos o cateto oposto de  $6x$  e a hipotenusa de 1. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$2^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{2 \cdot \text{sen } t \sqrt{4-(2 \text{sen } t)^2}} 2 \cos t \cdot dt \\ &= \int \frac{\cos t}{\text{sen } t \sqrt{4(1-\text{sen}^2 t)}} dt \end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica fundamental, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos t}{\text{sen } t \sqrt{4(1-\text{sen}^2 t)}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\text{sen } t \sqrt{\cos^2 t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{sen } t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \text{cosec } t \, dt = -\frac{1}{2} \ln |\text{cosec } t + \cotg t| + C \end{aligned}$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\begin{aligned} \text{sen } t &= \frac{x}{2} \rightarrow \frac{2}{x} = \text{cosec } t \\ \cotg^2 t &= \text{cosec}^2 t - 1 = \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1 = \frac{4-x^2}{x^2} \rightarrow \cotg t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$I = -\frac{1}{2} \ln |\text{cosec } t + \cotg t| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C$$

Resposta:  $I = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C.$

e) Observe que:

$$\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 3^2} \rightarrow a = 3 \text{ e } u(x) = x$$

Fazendo a substituição,

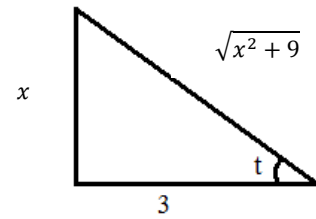
$$x = 3 \cdot \operatorname{tg} t \quad \rightarrow \quad dx = 3 \cdot \sec^2 t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

temos,

$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{3}$$



Chamamos o cateto oposto de  $x$  e o cateto adjacente de 3. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$y^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow y^2 = x^2 + 9 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + 9}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{(3 \cdot \operatorname{tg} t)^2}{\sqrt{(3 \cdot \operatorname{tg} t)^2 + 9}} \cdot 3 \sec^2 t \cdot dt \\ &= 27 \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{9(\operatorname{tg}^2 t + 1)}} \sec^2 t \cdot dt = 9 \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} \sec^2 t \cdot dt = \end{aligned}$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$\begin{aligned} I &= 9 \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} \sec^2 t \cdot dt = 9 \int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{\sec^2 t}} \sec^2 t \cdot dt \\ &= 9 \int \operatorname{tg}^2 t \cdot \sec t \cdot dt = 9 \int (\sec^2 t - 1) \cdot \sec t \cdot dt \\ &= 9 \left[ \int \sec^3 t \cdot dt - \int \sec t \cdot dt \right] \end{aligned}$$

Essas integrais foram resolvidas nos exemplos 4.33 e 4.24, respectivamente. Então,

$$I = 9 \left[ \int \sec^3 t \cdot dt - \int \sec t \cdot dt \right] = \frac{9}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{3} \text{ e } \sec^2 t = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1 = \frac{x^2 + 9}{9} \rightarrow \sec t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$$

Voltando à integral,



$$I = \frac{9}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C = \frac{9}{2} \left[ \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \cdot \frac{x}{3} - \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3} \right| \right] + C$$

Resposta:  $I = \frac{9}{2} \left[ \frac{x\sqrt{x^2+9}}{9} - \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3} \right| \right] + C.$

f) Observe que:

$$\sqrt{1+e^{2x}} = \sqrt{1^2 + (e^x)^2} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = e^x$$

Fazendo a substituição,

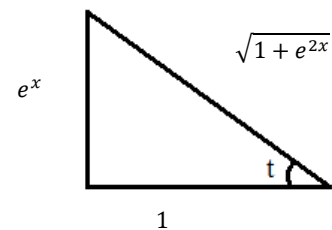
$$e^x = \operatorname{tg} t \rightarrow e^x dx = \sec^2 t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

temos,

$$\operatorname{tg} t = \frac{e^x}{1}$$



Chamamos o cateto oposto de  $e^x$  e o cateto adjacente de 1. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 1^2 + (e^x)^2 \rightarrow y^2 = 1 + e^{2x} \rightarrow y = \sqrt{1 + e^{2x}}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int \sqrt{1 + (\operatorname{tg} t)^2} \cdot \sec^2 t \cdot dt = \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$I = \int \sqrt{\sec^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt = \int \sec^3 t \cdot dt$$

Essa integral foi resolvida no exemplo 4.33. Então,

$$I = \int \sec^3 t \cdot dt = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t + \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\operatorname{tg} t = e^x \text{ e } \sec^2 t = \operatorname{tg}^2 t + 1 = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1 \rightarrow \sec t = \sqrt{1 + e^{2x}}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t + \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot e^x + \ln \left| \sqrt{1 + e^{2x}} + e^x \right| \right] + C = \end{aligned}$$

Resposta:  $I = \frac{1}{2} \left[ e^x \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \left| \sqrt{1 + e^{2x}} + e^x \right| \right] + C.$

g) Primeiro temos que completar quadrado na raiz e depois fazer substituição de variável:

$$x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x - 1)^2 - 1$$

Então,

$$u = x - 1 \rightarrow du = dx$$

Logo,

$$I = \int \sqrt{x^2 - 2x} \, dx = \int \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \, dx = \int \sqrt{u^2 - 1} \, du$$

Portanto:

$$\sqrt{u^2 - 1} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = u$$

Fazendo a substituição,

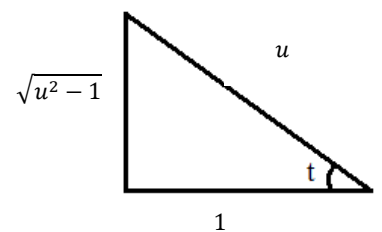
$$u = \sec t \rightarrow du = \sec t \cdot \operatorname{tg} t \, dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\sec t = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

temos,

$$\sec t = \frac{u}{1}$$



Chamando a hipotenusa de  $u$  e o cateto adjacente de 1 e aplicando o teorema de Pitágoras,

$$u^2 = 1^2 + y^2 \rightarrow y^2 = u^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{u^2 - 1}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int \sqrt{u^2 - 1} du = \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt = \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt = \int \operatorname{tg}^2 t \cdot \sec t dt \\ &= \int (\sec^2 t - 1) \cdot \sec t dt = \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt \end{aligned}$$

Essas integrais foram resolvidas nos exemplos 4.33 e 4.24, respectivamente. Então,

$$I = \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\sec t = u \text{ e } \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1 = u^2 - 1 \rightarrow \operatorname{tg} t = \sqrt{u^2 - 1}$$

Voltando à integral,

$$I = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C = \frac{1}{2} [u \cdot \sqrt{u^2 - 1} - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}|] + C$$

Voltando à variável  $x$ ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} [u \cdot \sqrt{u^2 - 1} - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}|] + C \\ &= \frac{1}{2} [(x - 1) \cdot \sqrt{(x - 1)^2 - 1} - \ln |(x - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 - 1}|] + C \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{1}{2} [(x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 2x} - \ln |(x - 1) + \sqrt{x^2 - 2x}|] + C.$$

h) Primeiro temos que completar quadrado na raiz e depois fazer substituição de variável:

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

Então,

$$u = x + 1 \rightarrow du = dx$$

Logo,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx = \int \sqrt{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \sqrt{u^2 + 1} du$$

Observe que:

$$\sqrt{u^2 + 1} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = u$$

Fazendo a substituição,

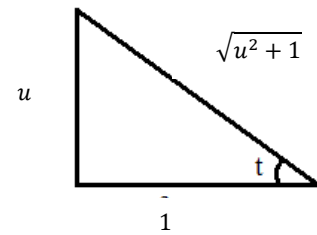
$$u = \operatorname{tg} t \quad \rightarrow \quad du = \sec^2 t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

temos,

$$\operatorname{tg} t = \frac{u}{1}$$



Chamamos o cateto oposto de  $u$  e o cateto adjacente de  $1$ . Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 1^2 + (u)^2 \rightarrow y^2 = 1 + u^2 \rightarrow y = \sqrt{1 + u^2}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int \sqrt{u^2 + 1} du = \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$I = \int \sqrt{\sec^2 t} \cdot \sec^2 t \cdot dt = \int \sec^3 t \cdot dt$$

Essa integral foi resolvida no exemplo 4.33. Então,

$$I = \int \sec^3 t \cdot dt = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t + \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\operatorname{tg} t = u \text{ e } \sec^2 t = \operatorname{tg}^2 t + 1 = u^2 + 1 \rightarrow \sec t = \sqrt{u^2 + 1}$$

Voltando à integral,

$$I = \frac{1}{2} [\sqrt{u^2 + 1} \cdot u + \ln |\sqrt{u^2 + 1} + u|] + C$$

Voltando à variável  $x$ ,

$$I = \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + 1} \cdot (x+1) + \ln |\sqrt{(x+1)^2 + 1} + (x+1)|] + C$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{1}{2} [(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 2} + (x+1)|] + C.$$

i) Primeiro temos que completar quadrado na raiz e depois fazer substituição de variável:

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$$

Então,

$$u = x - 3 \rightarrow du = dx$$

Logo,

$$I = \int \sqrt{x^2 - 6x + 8} dx = \int \sqrt{(x - 3)^2 - 1} dx = \int \sqrt{u^2 - 1} du$$

Portanto:

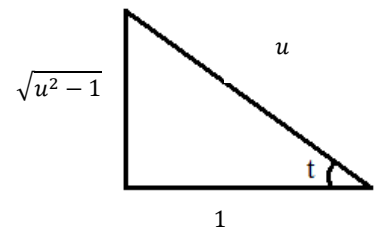
$$\sqrt{u^2 - 1} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = u$$

Fazendo a substituição,

$$u = \sec t \rightarrow du = \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\sec t = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$



temos,

$$\sec t = \frac{u}{1}$$

Chamando a hipotenusa de  $u$  e o cateto adjacente de 1 e aplicando o teorema de Pitágoras,

$$u^2 = 1^2 + y^2 \rightarrow y^2 = u^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{u^2 - 1}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int \sqrt{u^2 - 1} du = \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sec^2 t - 1} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt = \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt = \int \operatorname{tg}^2 t \cdot \sec t dt \\ &= \int (\sec^2 t - 1) \cdot \sec t dt = \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt \end{aligned}$$

Essas integrais foram resolvidas nos exemplos 4.33 e 4.24, respectivamente. Então,

$$I = \int \sec^3 t \, dt. - \int \sec t \, dt = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C$$

Precisamos voltar à variável de integração, note que:

$$\sec t = u \text{ e } \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1 = u^2 - 1 \rightarrow \operatorname{tg} t = \sqrt{u^2 - 1}$$

Voltando à integral,

$$I = \frac{1}{2} [\sec t \cdot \operatorname{tg} t - \ln |\sec t + \operatorname{tg} t|] + C = \frac{1}{2} [u \cdot \sqrt{u^2 - 1} - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}|] + C$$

Voltando à variável  $x$ ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} [u \cdot \sqrt{u^2 - 1} - \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}|] + C \\ &= \frac{1}{2} [(x - 3) \cdot \sqrt{(x - 3)^2 - 1} - \ln |(x - 3) + \sqrt{(x - 3)^2 - 1}|] + C \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } I = \frac{1}{2} [(x - 3) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 8} - \ln |(x - 3) + \sqrt{x^2 - 6x + 8}|] + C$$

$$\text{j) } I = \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 6x + 10)^3}} \, dx$$

Primeiro temos que completar quadrado na raiz e depois fazer substituição de variável:

$$x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Então,

$$u = x - 3 \rightarrow du = dx$$

Logo,

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 6x + 10)^3}} \, dx = \int \frac{x}{\sqrt{((x - 3)^2 + 1)^3}} \, dx = \int \frac{u + 3}{\sqrt{(u^2 + 1)^3}} \, du$$

Observe que:

$$\sqrt{u^2 + 1} \rightarrow a = 1 \text{ e } u(x) = u$$

Fazendo a substituição,

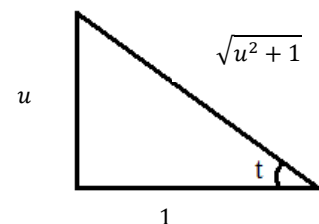
$$u = \operatorname{tg} t \rightarrow du = \sec^2 t \cdot dt$$

Se formos representar no triângulo retângulo, como:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

temos,

$$\operatorname{tg} t = \frac{u}{1}$$



Chamamos o cateto oposto de  $u$  e o cateto adjacente de 1. Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 1^2 + (u)^2 \rightarrow y^2 = 1 + u^2 \rightarrow y = \sqrt{1 + u^2}$$

Ou seja, o outro lado do triângulo é exatamente o radical que aparece na nossa integral.

Voltando à integral,

$$I = \int \frac{u + 3}{\sqrt{(u^2 + 1)^3}} du = \int \frac{\operatorname{tg} t + 3}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3}} \sec^2 t \cdot dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{tg} t + 3}{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3}} \sec^2 t \cdot dt = \int \frac{\operatorname{tg} t + 3}{\sqrt{(\sec^2 t)^3}} \sec^2 t \cdot dt = \int \frac{\operatorname{tg} t + 3}{\sec^3 t} \sec^2 t \cdot dt \\ &= \int \frac{\operatorname{tg} t + 3}{\sec t} dt = \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} dt + \int \frac{3}{\sec t} dt \\ &= \int \operatorname{sen} t \, dt + 3 \int \cos t \, dt = \cos t - 3 \operatorname{sen} t + C \end{aligned}$$

Precisamos voltar à variável de integração, pelo triângulo

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \text{ e } \operatorname{sen} t = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

Voltando à integral,

$$I = \cos t - 3 \operatorname{sen} t + C = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} - \frac{3u}{\sqrt{u^2 + 1}} + C$$

Voltando à variável  $x$ ,

$$I = \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + 1}} - \frac{3(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 1}} + C = \frac{3x-8}{\sqrt{x^2-6x+10}} + C$$

Resposta:  $I = \frac{3x-8}{\sqrt{x^2-6x+10}} + C.$